第23卷 第4期　　物 理 学 报　　Vol. 23, No. 4
1974年7月　　ACTA PHYSICA SINICA　　July, 1974

规范场与主纤维丛上的联络*

陆 启 铿
(中国科学院数学研究所)

提　　要

本文较详细地给出物理上的规范场与数学上的主纤维丛上的联络论之间的对应关系，从而以联络论的观点统一地处理杨振宁[1]所说的规范场的"微分方法"与"积分"方法，并指出存在有更广泛的规范场的可能性. 此外，讨论了引力场如何作为规范场及比较了一些已知的引力场方程.

杨振宁教授在一次学术报告[1]中提到，有些人认为规范场的理论可能与纤维丛的理论有关，然而迄今似还未有人以纤维丛的观点较系统地处理规范场的理论. 从数学和物理的发展过程可以看出，把新的数学概念与新的物理概念联系起来似乎是有益的. 例如黎曼几何与广义相对论，Hilbert 空间与量子理论. 本文尝试用主纤维丛的联络理论，把 Yang-Mills 场[2]的 Utiyama[3] "微分"方法推广的规范场与杨振宁[1]"积分"方法推广的规范场统一地处理，从而指出有存在比矩阵李群更广的规范场的可能性. 此外，正如杨振宁教授所指出的那样 Utiyama（可能包括 Kibble[4]）在把 Einstein 引力场纳入规范场的框架时，是把"传统"的规范场的做法作了一些修改，而在这里说明可以按"传统"的办法把 Einstein 引力场纳入规范场的框架. 关于这一点，Sciama[5] 曾意识到，虽未较具体地说明. 我们首先从电磁场的四维势 A_μ 的洛伦兹协变的定域化出发，而引力场作为规范场自然地引入. 这样，当不考虑引力场的"自旋"时，就自然地导致 Einstein-Maxwell 场方程，于是引力势作为联系于（associated to）切向量纤维丛的主纤维丛的联络出现，而电磁势 A_μ 作为切向量丛的一截面（section）. 然后我们指出，一般的物质-引力场亦可以同样处理.

但是，关于规范场的自由场方程应是什么形式还没有定论. 目前多是类比已知为正确的物理场方程的推广. 由不同的物理考虑出发，可以有不同的场方程，最终还要由物理实验去判定那一种正确. 所以本文的内容实际上可分为两部分：第一部分属于从主纤维丛的联络论的观点处理规范场；第二部分属于自由规范场方程的讨论. 在第二部分末，以自由引力场为例，从不同的场方程看看平行射线平面波（pp 波）的精确解之间有什么差异.

关于第一部分，本来可以用现代数学常用的更抽象的术语与符号精练地来叙述，然而为了便于与现代物理规范场的常用符号联系，也为了较易于为物理学工作者所接受，这里宁愿采取较繁、而较具体的局部坐标描述方法，以满足于仅引用文献来指出如何与抽象的描述是一致的.

* 1973年3月12日收到.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

一、主纤维丛的联络与规范势

首先简括地提一下有关的主要几何概念的轮廓. 至于这些概念的公理化定义，读者可以参阅文献[6—9].

一个 n 维微分流形M是由一些盖过M的开子集 $\{U, V, W, \cdots\}$ 以适当的方式拼凑而成的. 这些开子集的每一个 U，都可以看作是 n 维实数空间 R^n 的一开集，即有一映照 φ_U 把U一一地映为 R^n 的开集. 如点 $x \in U$，则 $\varphi_U(x)$ 在 R^n 的坐标叫做 x 点的局部坐标，在不致产生混淆时，我们常把 x 点和它的局部坐标等同起来. 如果 $x \in U \cap V$，则 $\varphi_{UV} = \varphi_U \varphi_V^{-1}$ 把 x 点在V的局部坐标映为 x 点在U的局部坐标，即是一局部坐标变换. 若这种坐标变换是可微分的，M 就称为微分流形，局部坐标变换的集合 $\{\varphi_{UV}\}$ 就是把开集 $U, V, W, \cdots$ 拼凑起来成为流形M的方式，显然适合

$$\varphi_{UV}\varphi_{VW} = \varphi_{UW}, \quad 当\ U \cap V \cap W \neq 0.$$

例如若每一坐标变换 φ_{UV} 皆是实解析的，则M称为实解析流形.

一 r 维李群G是一 r 维实解析流形同时是一群，即G的任两点 σ 与 τ 可定义一乘法 $\sigma\tau \in G$，对此乘法G成为一群；此外，要求 $\sigma\tau$ 作为G的点，它的坐标 $f^a(\sigma^1, \cdots, \sigma^r, \tau^1, \cdots, \tau^r)$ 是 σ 点的坐标 σ^a 与 τ 点的坐标 $\tau^a(a = 1, \cdots, r)$ 的实解析函数. 这里为方便起见，常把局部坐标简称之为坐标.

一主纤维丛P是由一微分流形M的一开遮盖 $\{U, V, W, \cdots\}$ 及一李群G与此遮盖的开集的拓扑积的集合 $\{U \times G, V \times G, W \times G, \cdots\}$，以适当的方式把拓扑积的集合拼凑而成（注意，这里 $U, V, W, \cdots$ 作为点集时容许彼此有相同的），即对任两开集的交集 $U \cap V \neq 0$ 时，有一可微分映照 $\varphi_{UV}: U \cap V \to G$. 当点 $(x, \sigma) \in U \times G$ 与点 $(y, \tau) \in V \times G$ 适合 $x = y$，$\sigma = \varphi_{UV}(x)\tau$，此两点称为等价，视为同一的点. φ_{UV} 就是把$U \times G$ 与 $V \times G$ 并凑起来的方式，叫联接函数（transition function）. 为了不产生矛盾，要求联接函数的集合 $\{\varphi_{UV}\}$ 适合

$$\varphi_{UV}(x)\varphi_{VW}(x) = \varphi_{UW}(x) \quad 当\ x \in U \cap V \cap W. \tag{1.1}$$

我们把 $\{U \times G, V \times G, W \times G, \cdots\}$ 的点按上述的等价关系分为等价类，每一等价类看作是一点. 这些点所成的空间P叫做以M为底空间，G为结构群的主纤维丛 $P(M, G)$ 的丛空间[1). 由此自然地有一映照 $\pi: P \to M$ 叫做投影，即把P中以 (x, σ) 为代表的等价类映为M中的 x 点. P中的点集 $\pi^{-1}(x)$ 称为 x 点上的纤维. 在不致产生混淆时，我们常以P的等价类的代表 (x, σ) 表示此等价类，并以 $(x, \sigma) \in U \times G$ 的局部坐标作为此等价类的局部坐标. 这样易见P成为一微分流形，其维数是 $r + n$，其中 r 与 n 分别是G与M的维数；此外，π 是一微分映照. 对任一 $\tau \in G$，可定义一微分映照 $R_\tau: P \to P$ 称为右移，把以 $(x, \sigma) \in U \times G$ 为代表的P的点，映为以 $(x, \sigma\tau) \in U \times G$ 为代表的P的点.

最简单的主纤维丛的例子是开遮盖中只有一开集 $U = M$，于是只有一联接函数 $\varphi_{UV}(x) = e$（e 是G的么元素），于是 $P = M \times G$，叫做显然的（trivial）主纤维丛. 但是

1）实际上，我们把纤维丛的构造定理(例如见文献 [6]，14 页或文献 [8]，18 页)作为纤维丛的定义.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

从空间为 $P = M \times G$ 的主纤维丛 $P(M, G)$ 的联接函数不一定显然的只有一个 $\varphi_{UU}(x) = e$. 例如取M的开遮盖 $\{U, V, W, \cdots\}$, 其中的开集作为点集是 $U = V = W = \cdots = M$. 对每一U取一任意的微分映照 $\varphi_U: U \to G$, 而对任两个开集U与 V, 命 $\varphi_{UV}(x) = \varphi_U(x)[\varphi_V(x)]^{-1}$, 则由 $\{U \times G, V \times G, \cdots\}$ 按上方法定义的从空间为 $P = M \times G$, 因为 $U \times G$ 的每一点必等价于 $V \times G$ 的一点. 反之亦然. 这里的联接函数 φ_{UV} 可以是任意的映M入G的映照. 这个例的重要性在于迄今为止大部分（包括引力场在内的规范场可能除外）物理上所考虑的规范场所对应的主纤维丛, 都是这种主纤维丛. 联接函数 $\varphi_{UV}(x)$ 即物理上的定域化（数学上叫局部化）的规范变换（gauge transformation）可以是任意的. 例如, Yang-Mills 及 Utiyama 所推广的规范变换就是如此, 并通常取 $M = R^4$. 那里的规范势即为主纤维丛上的联络（connection）. 虽然从空间 $P = M \times G$ 是显然的,并仅考虑了群G为矩阵李群,但由于联接函数非显然的, 联络就非显然的. 把规范场的理论与主纤维丛上的联络理论之间的关系弄清楚, 就看到有在一般的主纤维丛 $P(M, G)$ 上建立更广泛的规范场理论的可能性, 特别是考虑引力场包括在内的规范场时, 一般的主纤维丛概念是必须的.

主纤维丛 $P(M, G)$ 上的一联络 Γ 是对M的遮盖 $\{U, V, W, \cdots\}$ 的每一开集 U, 给定 rn 个函数 $\Gamma^a_\mu(x)(a = 1, \cdots, r; \mu = 1, \cdots, n)$, 它们对 $x \in U$ 的局部坐标 x^μ 是可微分的, 并满足如下的关系: 若 $\Gamma'^a_\mu(x)$ 是在另一开集V上给定的 rn 个函数, $x \in V$ 的局部坐标为 x'^μ, 则当 $x \in U \cap V$ 时,有

$$\Gamma'^a_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = (\mathrm{Ad}\ \varphi_{UV}(x)^{-1})^a_b \Gamma^b_\mu + v^a_b(\varphi_{UV}(x)) \frac{\partial \varphi^b_{UV}(x)}{\partial x^\mu}, \tag{1.2}$$

其中 $\mathrm{Ad}\,\sigma(\sigma \in G)$ 是李群G的伴随（adjoint）表示, 当G的李代数 $\mathfrak{G}$（亦即G的么元素 e 点的切空间)取定一组基 T_a 后,

$$\mathrm{Ad}\,\sigma \cdot T_a = (\mathrm{Ad}\,\sigma)^b_a T_b;$$

φ_{UV} 是主纤维丛 $P(M, G)$ 在 $U \cap V$ 定义的联接函数, $\varphi^b_{UV}(x)$ 是 $\varphi_{UV}(x) \in G$ 的局部坐标; $v^b_a(\sigma)$ 是

$$u^a_b(\sigma) = \left[\frac{\partial f^a(\sigma, \tau)}{\partial \tau^b}\right]_{\tau=e} \tag{1.3}$$

的方阵之逆方阵的元素. 这里 $f^a(\sigma, \tau)$ 表 $\sigma, \tau \in G$ 的乘积 $\sigma\tau$ 的局部坐标. 取 T_a 使得

$$T_a = \left[u^b_a(\sigma) \frac{\partial}{\partial \sigma^b}\right]_{\sigma=e}.$$

这样定义的联络与抽象的联络的定义(例如见文献[7, 8])是一致的, 因为以 dx^μ 乘(1.2)式两边并对指标 μ 求和,得

$$\Gamma'^a_\mu dx'^\mu = (\mathrm{Ad}\ \varphi_{UV}(x)^{-1})^a_b \Gamma^b_\mu dx^\mu + v^a_b(\varphi_{UV}(x)) d\varphi^b_{UV}(x). \tag{1.2'}$$

由此变换关系可知,在 P 上可以如此的构造 r 个一次微分式,在以(x, σ)为代表的点定义为

$$\omega^a = (\mathrm{Ad}\,\sigma^{-1})^a_b \Gamma^b_\mu dx^\mu + v^a_b(\sigma) d\sigma^b, \tag{1.4}$$

这是与局部坐标的选取无关的一次式,并且对 P 中的右移变换 $R_\tau(\tau \in G)$ 有如下关系:

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$(\mathrm{Ad}(\sigma\tau)^{-1})^a_b\Gamma^b_\mu dx^\mu + v^a_b(\sigma\tau)df^b(\sigma, \tau)$$
$$= (\mathrm{Ad}\,\tau^{-1})^a_b[(\mathrm{Ad}\,\sigma^{-1})^b_c\Gamma^c_\mu dx^\mu + v^b_c(\sigma)d\sigma^c]. \tag{1.5}$$

ω^a 称为 P 上的联络式 (connection form), 而 (1.4) 式中出现的 $v^a_b(\sigma)d\sigma^b$ 是 G 上的左不变微分式.

物理上常用的李群 G 是矩阵李群,即其元素 σ 是 $m\times m$ 方阵,此时李代数的基 T_a 亦可取之为 $m\times m$ 方阵. 若以 T_a 乘(1.2)式两边并对指标 a 求和,又命 $m\times m$ 方阵

$$\Gamma_\mu = \Gamma^a_\mu T_a,$$

可得

$$\Gamma'_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \varphi_{UV}(x)^{-1}\Gamma_\mu\varphi_{UV}(x) + \varphi_{UV}(x)^{-1}\frac{\partial\varphi_{UV}(x)}{\partial x^\mu}. \tag{1.2)''$$

通常物理上暂不考虑M的坐标变换, 即只讨论 $x'^\mu = x^\mu$ 的情形, 并且书 $\varphi_{UV}(x) = S(x)$ 称之为定域化规范变换,于是上式可写为

$$\Gamma'_\mu = S^{-1}\Gamma_\mu S + S^{-1}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \tag{1.6}$$

由此变换关系可知,联络 Γ^a_μ 即物理上称为规范势者(见文献 [2, 3]).

对任一主纤维丛 $P(M, G)$ 上的联络 Γ 可定义曲率张量:

$$F^a_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^a_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\Gamma^a_\mu}{\partial x^\nu} + C^a_{bc}\Gamma^b_\mu\Gamma^c_\nu, \tag{1.7}$$

其中 C^a_{bc} 为李代数 $\mathfrak{G}$ 对于基 T_a 的结构常数. 可以证明,曲率张量对 P 中的局部坐标变换有如下关系:

$$F'^a_{\lambda\rho}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} = (\mathrm{Ad}\,\varphi_{UV}(x)^{-1})^a_b F^b_{\mu\nu}. \tag{1.8}$$

物理上称曲率张量为规范场,因为当 G 为矩阵李群时,以 T_a 乘 (1.7) 式两边, 对指标 a 求和,并命

$$F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}T_a,$$

得

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\Gamma_\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_\mu\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\Gamma_\mu. \tag{1.9}$$

当取 $x'^\mu = x^\mu$, $\varphi_{UV}(x) = S(x)$ 时, (1.8) 式化为

$$F'_{\mu\nu} = S^{-1}F_{\mu\nu}S. \tag{1.10}$$

这是常见的规范场的变换关系.

物理上引进规范势的传统原因是考虑物理场量 $\chi^A(x)$ 的常数规范变换:

$$\chi'^A(x) = S^A_B\chi^B(x),$$

其中 (S^A_B) 是属于矩阵李群 G 的 $m\times m$ 常数方阵. 这里指标 $A, B, \cdots$ 表示由 1 到 m; 指标 $a, b, \cdots$ 表示由 1 到 r; 指标 $\mu, \nu, \cdots$ 表示由 1 到 n. 当考虑到规范变换的定域化,即认为 S^A_B 不再是常数而是依赖于 x 时, 那么 $\frac{\partial\chi^B}{\partial x^\mu}$ 不再是协变的, 因为

$$\frac{\partial\chi'^A}{\partial x^\mu} = S^A_B\frac{\partial\chi^B}{\partial x^\mu} + \frac{\partial S^A_B}{\partial x^\mu}\chi^B.$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

故有必要引进规范势 Γ_μ^a（即联络），使之能够定义协变微分.

数学上这自然导致引进联系于（associated to）主纤维丛 $P(M, G)$ 的纤维丛 $E(M, F, G, P)$ 的概念，此即 F 是 m 维微分流形，G 是可以作为 F 的李变换群．对 M 的开遮盖 $\{U, V, W, \cdots\}$，把与 F 的拓扑积的集合 $\{U\times F, V\times F, W\times F, \cdots\}$ 用 $P(M, G)$ 的联接函数 $\{\varphi_{UV}\}$ 按下面方式拼凑起来：$(x, \xi)\in U\times F$ 与 $(y, \eta)\in V\times F$ 认为是等价的，如果有 $x=y$ 及 $\xi=\varphi_{UV}(x)\eta$．按此等价关系把拓扑积集合中所有的点分为等价类，每一等价类看作是一点，这些点所成的空间命之为 E，称为联系于 $P(M, G)$ 的以 F 为纤维型的纤维丛 $E(M, F, G, P)$ 的丛空间．有一自然的映照 $\pi_E: E\to M$ 叫做投影．把 $(x, \xi)\in U\times F$ 的局部坐标作为 E 中以 (x, ξ) 为代表的等价类的局部坐标，易见 E 成为 $m+n$ 维微分流形，而 π_E 是一微分映照.

特别取 F 是 m 维向量空间．设 $\mathscr{R}$ 是李群 G 的 m 阶表示，即对每一 $\sigma\in G$ 有一 m 阶非异方阵 $\mathscr{R}(\sigma)$ 可微分地依赖于 σ．此外，$\mathscr{R}(\sigma\tau)=\mathscr{R}(\sigma)\cdot\mathscr{R}(\tau)$，当 $\sigma, \tau\in G$．我们定义 $\sigma\xi=\mathscr{R}(\sigma)\xi$，其中 $\xi\in F$ 看作是 $m\times 1$ 矩阵，于是 G 可以作为 F 的李变换群．因之可定义联系于 $P(M, G)$ 的以 F 为纤维型的纤维丛 $E(M, F, G, P)$.

设 χ 是 $E(M, F, G, P)$ 的一截面，即是一微分映照 $\chi: M\to E$ 适合 $\pi_E\chi(x)=x$．对任一 $x\in M$，由于 $\chi(x)\in E$，它在 E 的局部坐标可写为 $(x^\mu, \chi^A(x))$，其中 x^μ 为 $x\in U$ 的局部坐标，χ^A 为 F 中的局部坐标．由此可见，若 $(x'^\mu, \chi'^A(x))$ 是 $\chi(x)$ 的另一局部坐标，其中 x'^μ 是 $x\in V$ 的局部坐标，则有

$$\chi'^A=(\mathscr{R}(\varphi_{UV}(x)))_B^A\chi^B. \tag{1.11}$$

$\chi^A(x)$ 称为 M 上的 $\mathscr{R}$ 型张量场.

给与 $P(M, G)$ 上的联络 Γ，可定义 χ^A 的协变微分为

$$\chi^A{}_{\|\mu}=\frac{\partial\chi^A}{\partial x^\mu}+\Gamma_\mu{}^A{}_B\chi^B, \tag{1.12}$$

其中

$$\Gamma_\mu{}^A{}_B=K_a{}^A{}_B\Gamma_\mu^a, \tag{1.13}$$

这里 $K_a{}^A{}_B$ 是常数，定义为

$$K_a{}^A{}_B=\left[\frac{\partial(\mathscr{R}(\sigma))_B^A}{\partial\sigma^a}\right]_{\sigma=e}. \tag{1.14}$$

不难证明，χ^A 的协变微分 $\chi^A{}_{\|\mu}$ 仍是协变的，即对 E 的坐标变换有如下关系：

$$\chi'^A{}_{\|\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}=(\mathscr{R}(\varphi_{UV}(x)))_B^A\chi^B{}_{\|\mu}. \tag{1.15}$$

当 $\mathscr{R}=\mathrm{Ad}$ 是伴随表示时，易见

$$K_a{}^b{}_c=C_a{}^b{}_c,$$

即是李代数 $\mathfrak{G}$ 的结构常数.

又特别当 G 是 $m\times m$ 矩阵李群，$\mathscr{R}$ 是恒同表示，即 $\mathscr{R}(\sigma)=\sigma$．命 $S(x)=\varphi_{UV}(x)$，于是 (1.11) 式化为

$$\chi'^A=S_B^A(x)\chi^B;$$

当取 $x'^\mu=x^\mu$ 时，(1.15) 式化为

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\chi'^{A}{}_{\|\mu} = S^{A}_{B}\chi^{B}{}_{\|\mu}. \tag{1.16}$$

这说明物理上的规范变换 $S(x)$ 即主纤维丛上的联接函数 $\varphi_{UV}(x)$. 在此情形，若取 $\sigma \in G$ 的坐标为对于李代数 $\mathfrak{G}$ 的正则坐标（canonical coordinate），即

$$\sigma = e^{\sigma^a T_a} = I + \sigma^a T_a + \cdots + \frac{(\sigma^a T_a)^k}{k!} + \cdots,$$

则由 $\mathscr{R}(\sigma) = \sigma$ 知（1.14）式定义的常数

$$K_a{}^A{}_B = T_a{}^A{}_B \tag{1.17}$$

是方阵 T_a 的矩阵元.

在本节末，还须提到对任一主纤维丛 $P(M, G)$ 的联络 Γ 所定义的曲率张量(1.7)式，可以证明它必适合 Bianchi 恒等式:

$$\frac{\partial F^a_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F^a_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F^a_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + C_b{}^a{}_c(\Gamma^b_\lambda F^c_{\mu\nu} + \Gamma^b_\mu F^c_{\nu\lambda} + \Gamma^b_\nu F^c_{\lambda\mu}) = 0. \tag{1.18}$$

若底空间M是一黎曼流形，即有度规张量 $g_{\mu\nu}$，则可定义曲率张量 $F^a_{\mu\nu}$ 的协变微分为

$$F^a_{\mu\nu\|\lambda} = \frac{\partial F^a_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + C_b{}^a{}_c\Gamma^b_\lambda F^c_{\mu\nu} - \left\{ {\rho \atop \lambda\mu} \right\} F^a_{\rho\nu} - \left\{ {\rho \atop \lambda\nu} \right\} F^a_{\mu\rho}, \tag{1.19}$$

其中

$$\left\{ {\rho \atop \lambda\mu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\rho\nu}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}\right)$$

是 Christoffel 符号. 于是（1.18）式可写为

$$F^a_{\mu\nu\|\lambda} + F^a_{\nu\lambda\|\mu} + F^a_{\lambda\mu\|\nu} = 0. \tag{1.20}$$

特别当 G 为矩阵李群时，以 T_a 乘(1.18)式两边并对指标 a 求和，得

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + [\Gamma_\lambda, F_{\mu\nu}] + [\Gamma_\mu, F_{\nu\lambda}] + [\Gamma_\nu, F_{\lambda\mu}] = 0, \tag{1.21}$$

其中 $[R, S] = RS - SR$, S, R 为 $m \times m$ 方阵，而

$$F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}T_a. \tag{1.22}$$

当M是黎曼流形时，（1.21）式可写为

$$F_{\mu\nu\|\lambda} + F_{\nu\lambda\|\mu} + F_{\lambda\mu\|\nu} = 0, \tag{1.23}$$

其中

$$F_{\mu\nu\|\lambda} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + [\Gamma_\lambda, F_{\mu\nu}] - \left\{ {\rho \atop \lambda\mu} \right\} F_{\rho\nu} - \left\{ {\rho \atop \lambda\nu} \right\} F_{\mu\rho}.$$

二、平行移动与规范场的“积分”方法

现设 $P(M, G)$ 是任一主纤维丛. 底空间 M 的一曲线 γ 的提升，即一映照 $\varphi: \gamma \to P$ 适合 $\pi\varphi(x) = x$, $x \in \gamma$.

设给与 $P(M, G)$ 的一联络 Γ, U 是M的开遮盖中的一开集，$\Gamma^a_\mu(x)$ 是在U定义的联络. 取U适当小，使对任一在U中由A点到C点的曲线 $\gamma: x = x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, 我们把

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

它水平地提升为 P 上的由 (A, σ_0) 为代表的点出发的曲线 γ^* 如下：γ^* 上的以 (x, σ) 为代表的点，它的坐标是如下方程：

$$\frac{d\sigma^a}{dt} = -\Gamma^b_\mu(x)\, X^a_b(\sigma)\, \frac{dx^\mu}{dt}, \qquad x = x(t) \tag{2.1}$$

适合初值 $\sigma^a(t_0) = \sigma^a_0$ 的解，其中

$$X_a = X^b_a T_b,\ X^b_a(\sigma) = (\mathrm{Ad}\,\sigma^{-1})^c_a u^b_c(\sigma). \tag{2.2}$$

后者是 G 的由 T_a 产生的右不变向量场在 σ 点的分量．由微分方程理论知，此方程组的解是存在而且是唯一的． γ^* 达到的点，即以 $(C, \sigma(t_1))$ 为代表的点，称作以 (A, σ_0) 为代表的点沿由 A 到 C 的曲线 γ 的平行移动．由 (1.2)′ 式易知，方程(2.1)对于丛空间 P 的局部坐标变换是不变的．此外，当 $\tau \in G$ 时，以 $\frac{\partial(\sigma\tau)^c}{\partial\sigma^a}$ 乘 (2.1) 式两边，并对指标 a 求和得

$$\frac{d(\sigma\tau)^c}{dt} = -\Gamma^b_\mu(x) X^c_b(\sigma\tau)\, \frac{dx^\mu}{dt}. \tag{2.3}$$

这表明方程(2.1)是右移不变的． 它的几何意义是：若曲线 $\gamma^*: x = x(t),\ \sigma = \sigma(t)$ 是曲线 γ 从 (A, σ_0)（为代表的）点出发的水平提升，则曲线 $\gamma^*\tau: x = x(t),\ \sigma' = \sigma(t)\tau$ 是曲线 γ 由 $(A, \sigma_0\tau)$ 点出发的水平提升．由此得知，水平提升与局部坐标的选取无关；此外，若 (B, σ) 点是 (A, σ_0) 点沿曲线 γ 由 A 到 B 的平行移动，则 $(B, \sigma\tau)$ 点是 $(A, \sigma_0\tau)$ 点沿曲线 γ 由 A 到 B 的平行移动．

我们把解 $\sigma^a(t)$ 代入方程(2.1)，两边乘 dt 并从 t_0 到 t 积分之，得

$$\sigma^a(t) = \sigma^a_0 - \int_{t_0}^{t} \Gamma^b_\mu(x) X^a_b(\sigma)\, dx^\mu. \tag{2.4}$$

上式右边出现的积分，实际上是沿曲线 γ 由 $A = x(t_0)$ 到 $B = x(t)$ 点的积分，我们写为

$$\sigma^a = \sigma^a_0 - \int_A^B \Gamma^b_\mu X^a_b(\sigma)\, dx^\mu. \tag{2.5}$$

特别取 σ^a 为李群 G 对于 $\mathfrak{G}$ 的基 T_a 的正则坐标，并取初值 $\sigma^a_0 = 0$，此时 $\sigma_0 = \sigma(t_0) = e$．以 T_a 乘(2.5)式两边，并对 a 求和，得

$$\sigma^a T_a = -\int_A^B \Gamma^a_\mu X_a(\sigma)\, dx^\mu. \tag{2.6}$$

命 $\exp: \mathfrak{G} \to G$ 是把李代数 $\mathfrak{G}$ 映入 G 的指数映照，并命

$$\Phi_{BA} = \exp\left[-\int_A^B \Gamma^a_\mu X_a(\sigma)\, dx^\mu\right]. \tag{2.7}$$

实际上，据指数映照的定义，$\Phi_{BA} = \exp \sigma^a T_a = \sigma$.

显然 Φ_{BA} 与曲线 γ 有关．由于水平提升与局部坐标的选取无关，若 γ 落在 M 的遮盖的另一开集 V 中，Γ'^a_μ 是在 V 定义的联络，相应有

$$\Phi'_{BA} = \exp\left[-\int_A^B \Gamma'^b_\mu X_b(\sigma')\, dx'^\mu\right],$$

则必有

$$\Phi_{BA} = S(x)\Phi'_{BA}S^{-1}(x_0), \tag{2.8}$$

其中 $S(x) = \varphi_{UV}(x)$ 是 $U \cap V$ 中定义的联接函数，$x_0 = A,\ x = B$.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

又由(2.7)式知:

$$\Phi_{B+dB,B} = \exp[-\Gamma^b_\mu X_b(\Phi_{BB})dB^\mu]$$

(这里凡 $dB^\mu = dx^\mu$ 的高阶无穷小项皆略去之). 若以 Φ^a_{BA} 表 Φ_{BA} 的正则坐标,则由上式知道:

$$\Phi^a_{B+dB,B} = -\Gamma^b_\mu X^a_b(\Phi_{BB})dB^\mu. \tag{2.9}$$

特别当 G 为矩阵李群时,指数映照 exp 即普通的方阵的指数函数,故由(2.9)式知

$$\Phi_{B+dB,B} = e^{\Phi^a_{B+dB,B}T_a} = I - \Gamma^b_\mu X_b dx^\mu. \tag{2.9$'$}$$

此外,据 Φ_{CA} 的定义知,P 上 (A, e)(为代表的)点沿曲线 γ 由 A 到 C 的平行移动为 (B, Φ_{CA}) 点. 由于方程(2.1)是右移不变,$(B, e\cdot\Phi_{BA})$ 点沿曲线 γ 由 B 到 C 的平行移动为 $(C, \Phi_{CB}\cdot\Phi_{BA})$ 点. 由方程(2.1)的解的唯一性知:

$$\Phi_{CB}\cdot\Phi_{BA} = \Phi_{CA}. \tag{2.10}$$

Φ_{BA} 的性质(2.8—2.10)式可以作为 $P(M, G)$ 的联络,即规范势的定义(见文献[1]). 此即要证明:

若在主纤维丛 $P(M, G)$ 中,对 M 的遮盖的每一开集 U 内,任一过 A 与 B 点的曲线 γ,都对应有一李群 G 的元素 Φ_{BA},与曲线 γ 有关,使得曲线 γ 的提升: $B\to$ 以 (B, Φ_{BA}) 为代表的点,是与局部坐标的选取无关,即

(1) 当 γ 同时落在 M 的遮盖的另一开集 V 内,在 V 中相应的李群 G 中对应的元素为 Φ'_{BA},便有

$$\Phi_{BA} = S(x)\Phi'_{BA}S^{-1}(x_0),$$

其中 $S(x) = \varphi_{UV}(x)$ 是在 $U\cap V$ 定义的联接函数;此外,

(2) $\Phi_{B+dB,B}$ 的正则坐标 $\Phi^a_{B+dB,B}$ 是线性依赖于 γ 的切线方向,即

$$\Phi^a_{B+dB,B} = -\Gamma^b_\mu X^a_b(\Phi_{BB})dB^\mu.$$

(3) 当曲线 γ 经过 U 中 A, B, C 三点,恒有

$$\Phi_{CB}\cdot\Phi_{BA} = \Phi_{CA},$$

则 $\{\Gamma^a_\mu\}$ 定义了 $P(M, G)$ 上的一联络(或规范势),并使得

$$\Phi_{BA} = \exp\left[-\int_A^B \Gamma^a_\mu(x)X_a(\Phi_{BA})dx^\mu\right].$$

实际上,由(2)知, $\Phi^a_{BB} = 0$ 即 $\Phi_{BB} = e$; 由(3)知, $\Phi_{AB} = \Phi^{-1}_{BA}$, 因此有

$$\begin{aligned}\Phi_{B+dB,B} &= \Phi_{B+dB,A}\Phi^{-1}_{BA} = \exp \Phi^a_{B+dB,A}T_a\cdot\exp(-\Phi^a_{BA}T_a)\\ &= \exp\{f^a(\Phi_{B+dB,A}, \Phi^{-1}_{BA})T_a\} = \exp\left\{\left[\frac{\partial f^a(\tau, \Phi^{-1}_{BA})}{\partial\tau^b}\right]_{\tau=\Phi_{BA}}(\Phi^b_{B+dB,A}-\Phi^b_{BA})T_a\right\}.\end{aligned}$$

上面末式是略去高阶无穷小项,据(2)可推得

$$\Phi^a_{B+dB,B} - \Phi^a_{BA} = -\Gamma^b_\mu X^c_b(\Phi_{BB})\left[\frac{\partial f^a(\tau, \Phi_{BA})}{\partial\tau^c}\right]_{\tau=e}dx^\mu = -\Gamma^b_\mu X^a_b(\Phi_{BA})dx^\mu,$$

即

$$\frac{d\Phi^a_{BA}}{dt} = -\Gamma^b_\mu(x, \Phi_{BA})X^a_b(\Phi_{BA})\frac{dx^\mu}{dt}.$$

据(3), $\Phi^a_{BA} = (\Phi_{BC}\cdot\Phi_{CA})^a$, 以此代入上式,利用 $X_a(\sigma)$ 是右不变向量场,可知必须有

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\Gamma_\mu^b(x,\ \Phi_{BC}\Phi_{CA}) = \Gamma_\mu^b(x,\ \Phi_{BC}).$$

特别取 $B = C$ 时，

$$\Gamma_\mu^b(x,\ \Phi_{BA}) = \Gamma_\mu^b(x,\ e).$$

这表示 Γ_μ^b 仅与 x 有关，故有

$$\frac{d\Phi_{BA}^a}{dt} = -\Gamma_\mu^b(x)X_b^a(\Phi_{BA})\frac{dx^\mu}{dt}. \tag{2.11}$$

当曲线 γ 落在另一开集 V 中，同样可有

$$\frac{d\Phi_{BA}^{\prime a}}{dt} = -\Gamma_\mu^{\prime b}(x)X_b^a(\Phi'_{BA})\frac{dx^{\prime\mu}}{dt}.$$

据 (1), $\Phi_{BA}^a = (S\Phi'_{BA}S_0^{-1})^a$, $S_0 = S(x_0)$, 以之代入 (2.11) 式并注意 (2.11) 式是右移不变的，可以得出 $\Gamma_\mu^{\prime a}$ 与 Γ_μ^a 的关系为

$$\Gamma_\nu^{\prime a}\frac{\partial x^{\prime\nu}}{\partial x^\mu} = (\mathrm{Ad}\ S^{-1})_b^a\Gamma_\mu^b + v_b^a(S)\frac{\partial S^b}{\partial x^\mu}.$$

因此，$\{\Gamma_\mu^a\}$ 定义了 $P(M,\ G)$ 上的一联络．此外，由 (2.11) 式的积分得

$$\Phi_{BA} = \exp\left[-\int_A^B \Gamma_\mu^a X_a(\Phi_{BA})dx^\mu\right].$$

这证明了联络(或规范势)的两种定义是完全等价的．

有兴趣的是，当曲线 γ 是从 A 点出发又回到 A 的 U 中的闭曲线时，命

$$\Phi_\gamma = \exp\left[-\int_\gamma \Gamma_\mu^a X_a dx^\mu\right]. \tag{2.12}$$

它定义了 A 点上的纤维 $\pi^{-1}(A)$ 的一个映照：以 $(A,\ \sigma)$ 为代表的点 $\longrightarrow$ 以 $(A,\ \Phi_\gamma\sigma)$ 为代表的点，即 Φ_γ 可看作是 A 点的 Γ 的和乐群 (holonomic group) 的元素．特别当闭曲线 γ 可以在 U 中的一个曲面上连续地收缩为一点时，Φ_γ 是 A 点的 Γ 的受约 (restricted) 和乐群的元素．此时可利用 Stokes 公式得

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma &= \exp\left[-\iint_S d(\Gamma_\nu^a X_a(\sigma)dx^\nu)\right]\\ &= \exp\left\{-\iint_S \frac{\partial\Gamma_\nu^a}{\partial x^\mu}X_a dx^\mu_\wedge dx^\nu + \Gamma_\nu^a\frac{\partial X_a}{\partial\sigma^b}d\sigma^b_\wedge dx^\nu\right\}.\end{aligned}$$

以 (2.1) 式的 $d\sigma^a$ 及 (2.2) 式的 X_a 代入上式，得

$$\Phi_\gamma = \exp\left\{-\frac{1}{2}\iint_S\left[\frac{\partial\Gamma_\nu^b}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\Gamma_\mu^b}{\partial x^\nu} - \Gamma_\nu^a\Gamma_\mu^c\left(\frac{\partial X_a^b}{\partial\sigma^f}X_c^f - \frac{\partial X_c^b}{\partial\sigma^f}X_a^f\right)\right]T_b dx^\mu_\wedge dx^\nu\right\}.$$

由于 X_a 是 G 的右不变向量场，恒有

$$X_c^f\frac{\partial X_a^b}{\partial\sigma^f} - X_a^f\frac{\partial X_c^b}{\partial\sigma^f} = -C_{ca}^f X_f^b. \tag{2.13}$$

利用上式及曲率张量的定义 (1.7) 式有

$$\Phi_\gamma = \exp\left[-\frac{1}{2}\iint_S F_{\mu\nu}^a X_a dx^\mu_\wedge dx^\nu\right]. \tag{2.14}$$

此公式首先是杨振宁[1]所证明的．

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

三、引力场作为规范场 场方程的讨论

设 $A_\mu(x)$ 是狭义相对论的,对四维坐标 x^μ 的变换为洛伦兹协变的向量场(例如电磁势). 在时空的每一点 x 取分别平行于各坐标轴的 4 个逆变向量 $(e^\mu_{(1)}) = (1, 0, 0, 0)$, $(e^\mu_{(2)}) = (0, 1, 0, 0)$, $(e^\mu_{(3)}) = (0, 0, 1, 0)$, $(e^\mu_{(4)}) = (0, 0, 0, 1)$, 即 $e^\mu_{(\alpha)} = \delta^\mu_\alpha$. $\{e^\mu_{(\alpha)}\}$ 称为在 x 点的标架 (tetrad, vierbein), 即在 x 点的一个惯性参考系. 命

$$\hat{A}_\alpha(x) = A_\mu(x)e^\mu_{(\alpha)}. \tag{3.1}$$

这称为向量场 A_μ 对标架 $\{e^\mu_{(\alpha)}\}$ 的分量. 在现在的情形 $\hat{A}_\alpha = A_\alpha$.

若对每一点 x 的惯性参考系(或标架)皆作同样的洛伦兹变换:

$$e'^\mu_{(\alpha)} = e^\mu_{(\beta)}l^\beta_\alpha, \tag{3.2}$$

易见,向量场对于新的标架的分量为

$$\hat{A}'_\alpha = \hat{A}_\beta l^\beta_\alpha. \tag{3.3}$$

但是,若我们认为没有物理上的理由假定时空的每一点 x 的惯性参考系都是一样的,即 $e^\mu_{(\alpha)}$ 没有理由认为是常数,改为 $e^\mu_{(\alpha)}(x)$ 是依赖于 x 的,即仅是局部的惯性系,则自然地没有理由认为每一点的惯性系的变换都是一样的,而把 (3.2) 式改为

$$e'^\mu_{(\alpha)}(x) = e^\mu_{(\beta)}(x)l^\beta_\alpha(x). \tag{3.2$'$}$$

这里 $(l^\alpha_\beta(x))$ 是矩阵元依赖于 x 的洛伦兹方阵. 于是向量场 A_μ 对标架的分量的协变关系式 (3.3) 就变为

$$\hat{A}'_\alpha = \hat{A}_\beta l^\beta_\alpha(x). \tag{3.3}$$

不过这时上面关系式的偏微分:

$$\frac{\partial \hat{A}'_\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \hat{A}_\beta}{\partial x^\mu} l^\beta_\alpha + \hat{A}_\beta \frac{\partial l^\beta_\alpha}{\partial x^\mu}$$

不再是对定域化的洛伦兹变换是协变的, 有必要引进规范势 $\Gamma_\mu{}^\alpha{}_\beta$ 来定义协变微分, 使后者是协变的,这就要求规范势有如下的变换关系:

$$\Gamma'^\alpha_{\mu\beta} = \Gamma_\mu{}^\delta{}_\gamma l^\gamma_\beta L^\alpha_\delta + L^\alpha_\gamma \frac{\partial l^\gamma_\beta}{\partial x^\mu}, \tag{3.4}$$

而定义协变微分为

$$\hat{A}_{\alpha\|\mu} = \frac{\partial \hat{A}_\alpha}{\partial x^\mu} - \Gamma_\mu{}^\beta{}_\alpha \hat{A}_\beta. \tag{3.5}$$

这里 L^α_β 是 (l^α_β) 的逆方阵的矩阵元.

重要的是,只承认有局部惯性参考系 $\{e^\mu_{(\alpha)}(x)\}$, 立刻导致存在有度规:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{3.6}$$

其中度规张量 $g_{\mu\nu}$ 是由标架产生:

$$g_{\mu\nu} = e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu + e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu + e^{(3)}_\mu e^{(3)}_\nu - e^{(4)}_\mu e^{(4)}_\nu, \tag{3.7}$$

这里 $e^{(\alpha)}_\mu = e^{(\alpha)}_\mu(x)$ 为协变标架,是 $(e^\mu_{(\alpha)}(x))$ 的逆方阵的矩阵元. 注意度规 (3.6) 式与标架的变换无关. 度规的出现隐含了时空的"弯曲", 或引力场的出现. 此外, 度规的号差 (signature) 显然是 (+, +, +, −). 据 Synge (文献[10]序言)的等效原理的观点(这对

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

数学家是最容易接受的)，这可看作就是等效原理，这样，只承认有局部惯性参考系，立刻导致等效原理.

其次，另一重要的推论是，局部惯性参考系 $\{e^{\mu}_{(\alpha)}(x)\}$ 引进后，自然地容许任意的坐标变换. 因为向量场 $A_\mu(x)$ 对坐标变换是协变的，标架 $e^{\mu}_{(\alpha)}(x)$ 对每一固定的 α，其坐标变换是逆变的，故 $\hat{A}_\alpha(x)=A_\mu(x)e^{\mu}_{(\alpha)}(x)$ 对坐标变换是一标量，并对任意的坐标变换也是标量. 这是由于当我们作任意坐标变换

$$x^\mu = x^\mu(q^1, q^2, q^3, q^4)$$

时，相当于经典力学引进三维广义坐标 q^1, q^2, q^3, 不过现在是四维的广义坐标，可以如经典力学引进广义动量一样引进广义场量：

$$A'_\mu(q)=A_\nu(x)\frac{\partial x^\nu}{\partial q^\mu},\quad e'^{\mu}_{(\alpha)}(q)=e^{\nu}_{(\alpha)}(x)\frac{\partial q^\mu}{\partial x^\nu}.$$

由此可见

$$A_\mu(x)e^{\mu}_{(\alpha)}(x)=A'_\mu(q)e'^{\mu}_{(\alpha)}(q).$$

按定义，上式等于 $\hat{A}_\alpha(x)$；此表示 $\hat{A}_\alpha(x)$ 只与 x 点有关，与 x 点的坐标选取无关；这是说采用对于局部惯性系，即对于标架 $\{e^{\mu}_{(\alpha)}(x)\}$ 的场的分量描述物理量，是与坐标的选取无关，可以容许任意的坐标变换. 这就隐含了广义协变原理.

但是 Einstein 的广义相对论除了等效原理与广义协变原理以外，还要有另一假设，即关于场方程的假定. 按 Einstein 的建议，自由引力场方程可由变分

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d^4x=0 \tag{3.8}$$

而得，其中 $g=\det(g_{\mu\nu})$, R 是标量曲率，它定义为

$$R=F^{\alpha}_{\beta\mu\nu}e^{\mu}_{(\alpha)}e^{(\beta)}_{\lambda}g^{\nu\lambda}, \tag{3.9}$$

其中 $F^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ 是 (1.22) 式定义的方阵 $F_{\mu\nu}$ 的矩阵元. Sciama[5] 亦这样建议.

引力场作为规范场来处理，自然要求 (3.8) 式的变分是对规范势 $\Gamma_\mu{}^\alpha{}_\beta$ 的变分. 但是，由于度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的存在，自然地有一黎曼势，即黎曼联络：

$$\gamma_\mu{}^\alpha{}_\beta=e^{(\alpha)}_{\lambda}\frac{\partial e^{\lambda}_{(\beta)}}{\partial x^\mu}+\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}e^{(\alpha)}_{\lambda}e^{\nu}_{(\beta)}. \tag{3.10}$$

习知，两联络之差是一张量，故可写为

$$\Gamma_\mu{}^\alpha{}_\beta=\gamma_\mu{}^\alpha{}_\beta+T_\mu{}^\alpha{}_\beta, \tag{3.11}$$

其中 $T_\mu{}^\alpha{}_\beta$ 是一张量. 这个场量 $T_\mu{}^\alpha{}_\beta$ 就是 Kibble[4] 与 Sciama[5] 所说的引力场“自旋”的来源.

但引力场作为规范场，其自由场方程可以不一定必须取拉氏函数 $\mathscr{L}_0=R$ 的变分. 据 Utiyama 规范场的一般方法，若原来一物理场量 χ^A 的拉氏函数为 $\mathscr{L}\left(\chi^A, \frac{\partial\chi^A}{\partial x^\mu}\right)$，这是在以李群 G 的变换为规范变换时不变，则当规范变换定域化时，第一步把此拉氏函数改为 $\mathscr{L}(\chi^A, \chi^A{}_{||\mu})$，其中 $\chi^A{}_{||\mu}$ 是由联络(或规范势) Γ 定义的协变微分. 例如电磁场情形，把拉氏函数

$$\mathscr{L}=\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}\left(\frac{\partial\hat{A}_\alpha}{\partial x^\beta}-\frac{\partial\hat{A}_\beta}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{\partial\hat{A}_\gamma}{\partial x^\delta}-\frac{\partial\hat{A}_\delta}{\partial x^\gamma}\right) \tag{3.12}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

改为

$$\mathscr{L} = \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}(\hat{A}_{\alpha||\beta} - \hat{A}_{\beta||\alpha})(\hat{A}_{\gamma||\delta} - \hat{A}_{\delta||\gamma}), \tag{3.13}$$

这一步没有什么人有异议,但引进的规范势 Γ 的自由场方程应是什么,则有不同的看法.

Utiyama 进一步证明,如果用 G 群下不变的拉氏函数 $\mathscr{L}_0\left(\Gamma^a_\mu, \frac{\partial\Gamma^a_\mu}{\partial x^\nu}\right)$ 的变分作为自由场方程,则 $\mathscr{L}_0$ 必然是 $F^a_{\mu\nu}$ 的函数. 因此 Kibble 建议(当 G 为矩阵李群时)取

$$\mathscr{L}_0 = \mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \tag{3.14}$$

并认为这是最简单的. 这是电磁场拉氏函数的推广. 但杨振宁[1]认为不必用拉氏函数而采用场方程

$$F^a_{\mu\nu||}{}^{\nu} = S^a{}_\mu, \tag{3.15}$$

其中 S^a_μ 是物质场的"流". 例如当 G 为半单李群, M 是黎曼流形时, 可取 $S_a{}^\mu = \frac{\partial}{\partial\Gamma^a_\mu}\mathscr{L}$, 然后分别把指标 a 与 μ 上升和下降. 这是 Maxwell 方程的推广, 相当于另一组 Maxwell 方程是 Bianchi 恒等式(1.20). 至于自由场方程是命 $S^a{}_\mu = 0$. 最近有人[11]取 $G = SL(2, C)$, 构造拉氏函数得出 NP 方程;实质上这并未得出引力场方程,只是恒等式而已. 因为 NP 方程[12]是假定了 Einstein 场方程成立,并且利用了 Géhéniau-Debever[13] 的黎曼曲率张量的分解,然后才成为方程,否则仅是恒等式.

现在回到场量是 $\hat{A}_\alpha$, G 是洛伦兹群的情形. 若 $\hat{A}_\alpha$ 代表电磁势,则 $\mathscr{L}$ 是(3.14)式的形式乘以一常数. 据 Utiyama 的理论,电磁场的拉氏函数应为

$$\mathscr{L}_T = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}, \tag{3.16}$$

而场方程为

$$\delta\int \mathscr{L}_T\sqrt{-g}\,d^4x = 0. \tag{3.17}$$

这里取 $\mathscr{L}_0 = R$ (其理由稍后叙述), 当不考虑引力场的"自旋", 即取 $T_\mu{}^\alpha{}_\beta = 0$ 时, 由(3.17)式立得 Einstein-Maxwell 方程:

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta} - \dfrac{R}{2}\eta_{\alpha\beta} = \kappa\left(f_{\alpha\gamma}f_\beta{}^\gamma - \dfrac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}f_{\gamma\delta}f^{\gamma\delta}\right), \\ f_\alpha{}^\beta{}_{||\beta} = 0, \qquad f_{\alpha\beta} = \hat{A}_{\alpha||\beta} - \hat{A}_{\beta||\alpha}. \end{cases}$$

若我们的出发点不是向量场 A_μ, 而是更一般的场 χ^A, 它是如下的洛伦兹协变的:

$$\chi'^A = (\mathscr{R}(L))^A_B\chi^B,$$

其中 $\mathscr{R}$ 是洛伦兹群 G 的任一表示, $L \in G$, 则当定域化时,即把上变换关系改为

$$\chi'^A = (\mathscr{R}(L(x)))^A_B\chi^B,$$

L 是依赖于 x, 相应的规范势可由(1.13)式得之,并且其具体的表达式亦不难得出(可参阅文献[14]).

值得讨论的是自由引力场方程. 这里仅讨论无"自旋", 即取 $T_\mu{}^\alpha{}_\beta = 0$ 情形. 此时 $\mathscr{L}_0$ 仅依赖于 $g_{\mu\nu}$. 对于 Kibble 建议的拉氏函数(3.14)式此时化为

$$\mathscr{L}_0 = R_{\rho\lambda\mu\nu}R^{\rho\lambda\mu\nu},$$

其中 $R_{\rho\lambda\mu\nu}$ 为普通的黎曼曲率张量. 由计算可知,从变分

$$\delta\int \mathscr{L}_0\sqrt{-g}\,d^4x = 0$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

得出 Kibble 的场方程为

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{||\rho\lambda} + \frac{1}{2} R_{\sigma\rho\lambda\mu}R^{\sigma\rho\lambda}{}_{\nu} - \frac{1}{8} g_{\mu\nu}R_{\sigma\rho\lambda\eta}R^{\sigma\rho\lambda\eta} = 0. \tag{3.18}$$

而杨振宁的场方程 (3.15) 在自由引力场时化为

$$R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu||}{}^{\nu} = 0. \tag{3.19}$$

利用 Bianchi 恒等式(1.22)及黎曼几何的 Ricci 恒等式:

$$R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu} + R^{\rho}{}_{\mu\nu\lambda} + R^{\rho}{}_{\nu\lambda\mu} = 0,$$

上方程可化为

$$R_{\lambda\mu||\nu} - R_{\lambda\nu||\mu} = 0, \tag{3.19$'$}$$

其中 $R_{\lambda\mu}$ 为 Ricci 张量,而 Einstein 自由场方程则为

$$R_{\lambda\mu} = 0. \tag{3.20}$$

比较 (3.18)—(3.20) 式知, Kibble 方程为四阶,杨振宁方程为三阶, Einstein 方程为二阶非线性偏微分方程. 习知 Einstein 方程作静态的线性近似时化为 Laplace 方程, 这和牛顿的真空引力场方程是一致的,而 Kibble 方程为四阶, 杨振宁方程为三阶并不化为牛顿方程. 原因是 Utiyama 只证明 $\mathscr{L}_0$ 对任何规范场必是 $F^a_{\mu\nu}$ 的函数,并没有说是什么样的函数. 当规范群 G 是 $n \times n$ 矩阵李群并且 n 等于黎曼流形 M 的维数时, $\mathscr{L}_0$ 可以是曲率张量 $F^A{}_{B\mu\nu}$ 的一次函数. 因为可以作如此的并缩 $F^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}g^{\mu\nu}$ 而命之为 $\mathscr{L}_0$. 但 Kibble 的拉氏函数是 $F^A{}_{B\mu\nu}$ 的二次函数,在此特殊情形并非最简单的, 不过 Einstein 的拉氏函数无法推广到一般规范场, 而 Kibble 的对一般地 G 为矩阵李群皆可以, 而杨振宁场方程甚至一般的李群皆可以.

四、平行射线平面波(pp 波)

平行射线平面波的几何意义是四维双曲黎曼空间 M 中存在一平行射线向量场 ξ^{μ}, 即 ξ^{μ} 为类光的且适合

$$\xi^{\mu}{}_{||\nu} = 0. \tag{4.1}$$

Ehlers-Kundt[15] 证明可选取坐标使度规化为

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - 2H(dx^3)^2 - 2dx^3dx^4, \tag{4.2}$$

其中 H 不包含 x^4. 由此易知:

$$\left\{ {4 \atop 13} \right\} = \left\{ {4 \atop 31} \right\} = \frac{\partial H}{\partial x^1}, \quad \left\{ {4 \atop 23} \right\} = \left\{ {4 \atop 32} \right\} = \frac{\partial H}{\partial x^2}, \quad \left\{ {4 \atop 33} \right\} = \frac{\partial H}{\partial x^3},$$

$$\left\{ {1 \atop 33} \right\} = \frac{\partial H}{\partial x^1}, \quad \left\{ {2 \atop 33} \right\} = \frac{\partial H}{\partial x^2}, \quad \text{其它} \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = 0$$

及

$$R_{\mu\nu} = -\left[\frac{\partial^2 H}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 H}{(\partial x^2)^2}\right] \delta^3_{\mu}\delta^3_{\nu}.$$

故度规(4.2)式是 Einstein 方程之解只须 H 适合

$$\Delta H = 0, \tag{4.3}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2}.$$

由于

$$R_{\lambda\mu||\nu} = \frac{\partial R_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \left\{\begin{matrix}\rho \\ \nu\lambda\end{matrix}\right\} R_{\rho\nu} - \left\{\begin{matrix}\rho \\ \nu\mu\end{matrix}\right\} R_{\lambda\rho},$$

故杨振宁方程为

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial x^\nu} = 0 \qquad \nu = 1, 2, 4.$$

因此度规(4.2)式是杨振宁方程之解,只须

$$\Delta H = f(x^3),$$

其中 f 是 x^3 的任意函数.

至于 Kibble 方程,我们以 $g^{\mu\nu}$ 乘(3.18)式两边,并对指标 μ, ν 求和, 利用恒等式

$$R_{\lambda}{}^{\rho}{}_{||\rho} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^\lambda},$$

可得

$$g^{\lambda\mu}\left(\frac{\partial R}{\partial x^\lambda}\right)_{||\mu} = 0 \text{ 或者 } \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial R}{\partial x^\nu}\right) = 0.$$

故度规(4.2)式是 Kibble 方程之解,必须

$$\Delta\Delta H = 0.$$

即 H 对 x^1, x^2 必须是双重调和函数,亦即必须

$$\Delta H = h(x^1, x^2, x^3),$$

其中 h 对 x^1, x^2 是任意的调和函数.

参 考 文 献

[1] 杨振宁，规范场——一个新定义，学术报告(之五)，1972年7月1日于北京大学.
[2] C. N. Yang, R. L. Mills, *Phys. Rev.*, **96**(1954), 191.
[3] R. Utiyama, *Phys. Rev.*, **101**(1956), 212.
[4] T. W. B. Kibble, *J. Math. Phys.*, **2**(1961), 212.
[5] D. W. Sciama, Recent Developments in General Relativity (1962), 415—438.
[6] N. Steenrod, The Topology of Fibre Bundle, 1950.
[7] A. Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groups d'holonomie (1955).
[8] K. Nomizu, Lie Groups and Differential Geometry (1956).
[9] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundation of Differential Geometry (1965).
[10] J. L. Synge, Relativity: The General Theory (1960).
[11] M. Carmeli, S. J. Fickler, *Phys. Rev.*, **D5**(1972), 290.
[12] E. T. Newman, R. Penrose, *J. Math. Phys.*, **3**(1962), 560.
[13] J. Géhéniau, R. Debever, *Bull. Acad. Roy. Belg. Cl. des SC.*, **42**(1956), 608.
[14] 陈启铿，科学纪录，**3** (1959), 232.
[15] J. Ehlers, W. Kundt, Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. by L. Witten (1962), 49.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

THE YANG-MILLS FIELDS AND THE CONNECTIONS OF PRINCIPLE FIBRE BUNDLES

K. H. Look

(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

Abstract

The relation between the theory of Yang-Mills fields and that of connections of principle bundles is established. It is proved that the new definition of the Yang-Mills field suggested by Yang is equivalent to the parallelism along a curve. The field equations proposed by various authors are discussed. A solution without singularity is given to Yang's field equations.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net